מטריצות ואופרטורים אורתוגונליים ואוניטריים

P אורת\אוניט: (או או )

1. עמודות\שורות של P הם בסיס א"נ ב\
2. מטריצת מעבר בין בסיס הסטנדרטי ב\ ובסיס א"נ היא אורת\אוניט ולהפך.  
   2.תרגיל יהיו שני בסיסים במרחב עם (מעל או ) M מטריצת מעבר מS ל. אם S א"נ וM אורת\אוניט אזי גם א"נ. ואם ו א"נ אזי M אורת\אוניט.

# תוצאה

יהי A מטריצה סמטרית ממשית(או הרמיטית). אזי קיימת מטריצה אורתוגונלית P(או אוניטרית) כך ש: , הם ע"ע של A.

## "הוכחה"

לכל A קיים בסיס עצמי א"נ. מטריצת מעבר מבסיס הסט. לבסיס עצמי היא אורת\אוניט.

## הערה

P מקיימת: ⇦

לכסון של אופ. אוניטריים

אוניטרי(מעל ) אם לכל (⬄ )

## תרגיל

אם אופרטור לינארי ו לכל אזי U אוניטרי(או אורתוגונלי).

# הערה – איזומטריה

אם X מרחב מטרי(כלומר קיימת פונקציה מרחק), נקראת איזומטריה אם לכל .

אם V מרחב וקטורים ו מכפלה פנימית אזי מגדירה מטריקה(מרחק): .

*אופרטור לינארי הוא איזומטרי ⬄ U אוניט\אורת.*

# משפט

יהיו אופרטור אוניט(או אורת), בסיס א"נ. מטריצה היא אוניט(או אורת). (וגם להפך).

## רמז

# משפט

יהי אוניט(או אורת) ו ע"ע. אזי

## תוצאה

אם אורתוגונלי ו ע"ע אזי

## דוגמה

מקיימת אבל אין לה ע"ע ב. מעל יש לה 2 ע"ע

# משפט

יהיו U אוניט(אורת), ע"ע שונים() אזי ווקטורים עצמיים הם אורתוגונלים:  
 ⇦

# משפט

יהיו אוניט(אורת.), תת מרחב U-אינווריאנטי אזי גם U-אינווריאנטי.

## הערה

אם U-אינווריאנטי אזי גם אוניט\אורת, לכל

# תוצאה:

# משפט

יהי איניטרי(מעל ) אזי קיים בסיס  *א"נ עצמי, כלומר בסיס אינ כך ש:  
 כאשר , ע"ע של U.*

# תוצאה

יהי אוניטרית. אזי קיימת מטריצה Q אוניטרית כך ש

# משפט

אם U אוניטרי אזי U לא סינגולרי() ⇦ קיים.

## הוכחה

אם אזי ⇦

# למה

יהי V עם , ו לא סינגולרי. אם תת מרחב U אינווריאנטי אזי W גם -אינווריאנטי

## הוכחה

U לא סינגולרי ו ⇦ ⇦ ⇦ U על וחד-חד.  
 כי W U-אינווריאנטי. ⇦ ⇦ מוגדר לכל ווקטור . כלומר קיים(ויחיד) ווקטור כך ש ⇦ ⇦ W הוא תת מרחב אינווריאנטי.

# הוכחות

## 1.

יהי , / כך ש

## 2. ⇦

תרגיל.

## 3. U-אינווריאנטי ⇦ U-אינווריאנטי.

נוכיח ש , כלומר   
 בגלל שW הוא גם אינווריאננטי.

# משפט

יהי אופרטור אורת(מעל ). אזי קיים בסיס א"נ כך ש:

*= ריבוי אלגברי(=גיאומטרי) של 1  
 = ריבוי אלגברי\גיאומטרי של -1*

# למטריצות

אם P אורתוגונלית ממשית אזי קיימת Q אורתוגונלית כך ש:

# תוצאה: משפט(Euler)

כל איזומטריה של היא סיבוב מסביב לישר במישור אורתוגונלי. (או שיקוף)

איזומטריה ⇦ מטריצה אורתוגונלית ⇦ קיים בסיס א"נ כך ש:

שיקוף ביחס לx,y:

## הוכחה

אורתוגונלית ⇦ גם אוניטרית ,   
קיים בסיס א"נ ב כך שהיא דומה ל

אם ע"ע של P אזי גם ע"ע של P.

⇦ ע"ע הם שונים, בת"ל.

## תרגיל

אם P בבסיס היא אזי בבסיס היא